PROBLEMAS RESUELTOS DE GEOMETRÍA SIMPLE EN ESTÁTICA, UTILIZANDO LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL: NIVEL AVANZADO.

Problema 5

Se tiene un capacitor con dieléctrico de aire y placas paralelas en forma de disco de radio R, separadas una distancia $d<<R$, en el cual hay un campo eléctrico variable $\overline{E}(t) = E_0 \cos(\omega\, t)\, \overline{1}_z$ V/m.

a) Determinar el campo magnético dentro del capacitor, despreciando el efecto del campo magnético sobre el campo eléctrico, y despreciando el desbordamiento del campo eléctrico.

b) Determinar la frecuencia máxima a la que puede despreciarse el efecto del campo magnético sobre el campo eléctrico. Evaluar para R = 1 cm.

Solución.

a) Cálculo del campo magnético.

Aunque este problema no es de estática, se resuelve aplicando un método similar al utilizado en problemas de estática. En esto consiste la llamada *aproximación cuasi-estática.*

ESTUDIO DE COORDENADAS Y DE COMPONENTES NULAS

Las variaciones temporales del campo eléctrico en el capacitor producen un campo magnético, según la Ley de Ampère-Maxwell. Debido a la simetría cilíndrica del sistema, el campo magnético depende sólo de la coordenada radial. Además, por Ley de Gauss para el campo magnético, cuando el campo magnético sólo depende de ρ, entonces $H_\rho = 0$. Por regla de la mano derecha, la componente axial H_z del campo magnético es nula. Entonces:

$$\overline{H}(\rho,t) = \overline{1\varphi}\, H_\varphi(\rho,t)$$

CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO

Para calcular el campo magnético, se aplica la Ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial:

$$\nabla \times \overline{H}(\rho,t) = \overline{J}(\rho,t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = -\overline{1z}\, \varepsilon_0 \omega\, E_0 \operatorname{sen}(\omega\, t)$$

Evaluando el rotacional, se tiene:

$$\nabla \times \overline{H}(\rho,t) = \overline{1z}\, \frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\rho H_\varphi(\rho,t)\right)}{\partial \rho} = -\overline{1z}\, \varepsilon_0 \omega\, E_0 \operatorname{sen}(\omega\, t)$$

De aquí se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\rho H_\varphi(\rho,t)\right)}{\partial \rho} = -\varepsilon_0 \omega\, E_0 \operatorname{sen}(\omega\, t)$$

Resolviendo:

$$H_\varphi(\rho,t) = -\varepsilon_0\, E_0 \left(\omega/2\right) \rho \operatorname{sen}(\omega\, t) + C_1(t)/\rho, \text{ si } 0 < \rho < R$$

La función $C_1(t)$ debe ser nula, porque el campo debe ser acotado en el eje z. Entonces:

$$\overline{H}(\rho,t) = -\overline{1\varphi}\, \varepsilon_0\, E_0 \left(\omega/2\right) \rho \operatorname{sen}(\omega\, t), \text{ si } \rho \le R,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ |z| < \infty$$

b) Cálculo de la frecuencia máxima de la aproximación cuasi-estática.

Para calcular la frecuencia máxima, se introduce el campo magnético calculado en la Ley de Faraday y se calcula de nuevo el campo eléctrico. El campo eléctrico nuevo debe ser aproximadamente igual al campo eléctrico inicial. Bajo esta premisa, se consigue una relación entre la frecuencia y las otras constantes del problema.

La Ley de Faraday establece:

$$\nabla \times \overline{E}(\rho, t) = -\mu_0 \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = \overline{1\varphi}\, \varepsilon_0\, \mu_0 E_0 \left(\omega^2/2\right) \rho \cos(\omega\, t)$$

Resolviendo el rotacional, se tiene:

$$-\frac{\partial E_z(\rho, t)}{\partial \rho} = \varepsilon_0\, \mu_0 E_0 \left(\omega^2/2\right) \rho \cos(\omega\, t)$$

de donde:

$$E_z(\rho, t) = -\varepsilon_0\, \mu_0 E_0 \left(\omega^2/4\right) \rho^2 \cos(\omega\, t) + C_2(t)$$

La función $C_2(t)$ obviamente debe ser el campo eléctrico inicial. Entonces:

$$E_z(\rho, t) = E_0 \cos(\omega\, t) \left[1 - \varepsilon_0\, \mu_0 \left(\omega^2/4\right) \rho^2\right]$$

Para que el efecto del campo magnético sobre el campo eléctrico sea despreciable, el término entre corchetes debe ser aproximadamente la unidad:

$$\left[\varepsilon_0\, \mu_0 \left(\omega^2/4\right) \rho^2\right]_{máx} << 1 \Rightarrow \omega_{máx} << \frac{2}{R\sqrt{\varepsilon_0\, \mu_0}} = \frac{2c}{R}$$

Aplicando criterio ingenieril:

$$\omega_{máx} = \frac{c}{5R} \Rightarrow f_{máx}\Big|_{R=1\,\text{cm}} = 954{,}93\ \text{MHz}$$